Лекция 7
ЦЕЛЫЕ ФУНКЦИИ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА

О п р е д е л е н и е. Целая функция $f(z)$ называется ***целой функцией экспоненциального типа***, если ее порядок $\rho_f = \rho < 1$ или $\rho_f = 1$, но тогда тип $\sigma_f = \sigma$ конечен.

Целую функцию экспоненциального типа обычно записывают в виде

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k!} z^k.$$

Если функция $f(z)$ имеет порядок $\rho = 1$ и конечный тип σ, то исходя из формулы

$$(\sigma e \rho)^{1/\rho} = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, n^{1/\rho} \sqrt[n]{|b_n|} = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, n^{1/\rho} \sqrt[n]{\frac{|a_n|}{n!}},$$

где b_n — тейлоровский коэффициент разложения, получим, что

$$\sigma = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Если $\rho < 1$, то исходя из формулы

$$\rho = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n \ln n}{\ln\left|\frac{1}{b_n}\right|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n \ln n}{\ln\left|\frac{n!}{a_n}\right|}$$

получим, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 0.$$

В дальнейшем под σ будем понимать $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$.

Рассмотрим функцию $\gamma(t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{t^{k+1}}$. Так как ряд сходится при $|t| > \sigma = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$, то $\gamma(t) \in A(|t| > \sigma)$, при этом на границе $|t| = \sigma$ имеется по крайней мере одна особенность функции $\gamma(t)$. Назовем $\gamma(t)$ *функцией, ассоциированной по Борелю с функцией $f(z)$*.

Отметим следующие **свойства функции, ассоциированной по Борелю с функцией $f(z)$**:

1. *Линейность*: если $\gamma_1(t)$ — функция, ассоциированная по Борелю с функцией $f_1(z)$, а $\gamma_2(t)$ — с функцией $f_2(z)$, то функция $\alpha_1\gamma_1(t) + \alpha_2\gamma_2(t)$ есть функция, ассоциированная по Борелю с функцией $\alpha_1 f_1(z) + \alpha_2 f_2(z)$, где α_1, α_2 — комплексные числа.
2. Если $f(z) = Ae^{az}$, где A, a — фиксированные комплексные числа, то функция $\gamma(t) = \dfrac{A}{t-a}$ — ассоциированная с $f(z)$.
3. Если $f(z) = \sin z$, то $\gamma(t) = \dfrac{1}{t^2+1}$.
4. Если $f(z) = \cos z$, то $\gamma(t) = \dfrac{t}{t^2+1}$.

Существует связь между ростом функции $f(z)$ по лучам и выпуклой оболочкой множества особенностей $\gamma(t)$.

Определение. Множество $D \subset \mathbb{C}$ — ***выпуклое***, если для любых точек a, $b \in D$ следует, что отрезок $[a, b] \subset D$.

Пусть $\bar{G}$ — ограниченное, замкнутое, выпуклое множество, $\bar{G} \subset \mathbb{C}$.

Определение. Функция $K(\varphi) = \max\limits_{z \in \bar{G}} \mathrm{Re}(ze^{-i\varphi})$ называется ***опорной функцией*** множества $\bar{G}$.

Выражение $\mathrm{Re}(ze^{-i\varphi})$ представляет проекцию вектора z на направление $\arg z = \varphi$. Тем самым максимальная проекция векторов при $z \in \bar{G}$ есть значение функции $K(\varphi)$. Так как множество $\bar{G}$ — компакт, то опорная функция $K(\varphi)$ будет непрерывной.

Пусть для точки $z_0 \in \bar{G}$ достигается $\max\limits_{\bar{G}} \mathrm{Re}(ze^{-i\varphi}) = \mathrm{Re}(z_0 e^{-i\varphi}) = K(\varphi)$.

Назовем прямую l_0, перпендикулярную лучу $\arg z = \varphi$ и проходящую через точку z_0, ***опорной прямой*** к множеству $\bar{G}$. Зафиксируем луч $\arg z = \varphi$ и рассмотрим систему прямых, перпендикулярных лучу, двигая их по лучу из бесконечности до встречи с множеством $\bar{G}$, тогда геометрический смысл опорной прямой — это прямая из этой системы, имеющая точку пересечения с множеством $\bar{G}$ в точке z_0.

Определение. Множество $\bar{G}_\varepsilon$, $\varepsilon > 0$ называется ***ε-расширением*** $\bar{G}$, если для любой точки $z_0 \in \bar{G}$ множество $|z - z_0| \le \varepsilon$ принадлежит $\bar{G}_\varepsilon$ и для любой точки $z \in \bar{G}_\varepsilon$ найдется точка $z_0 \in \bar{G}$ такая, что $|z - z_0| \le \varepsilon$.

Заметим, что если $K(\varphi)$ — опорная функция множества $\bar{G}$, то для ε-расширения $\bar{G}_\varepsilon$ множества $\bar{G}$ опорной функцией является $K(\varphi)+\varepsilon$.

Примеры

1. Пусть множество $\bar{G}$ есть круг $|z| \le \sigma$ $(\sigma > 0)$. Опорная функция $K(\varphi) = \sigma$.

2. Пусть $\bar{G}$ есть отрезок $[-i\sigma, i\sigma]$, $\sigma > 0$. Опорная функция $K(\varphi) = \sigma|\sin\varphi|$.

Теорема 7.1. Если опорные функции выпуклых множеств $\bar{G}_1$ и $\bar{G}_2$ равны, то равны и сами множества: $\bar{G}_1 = \bar{G}_2$.

Доказательство. Пусть опорные функции равны: $K_1(\varphi) = K_2(\varphi)$, но множества не совпадают $(\bar{G}_1 \ne \bar{G}_2)$, тогда предположим, что существует, например, точка $z_0 \in \bar{G}_2$, но $z_0 \notin \bar{G}_1$. Так как множество $\bar{G}_1$ — компакт, то

$$\min_{z \in \bar{G}_1} \rho(z_0, z) = \rho(z_0, z_1) > 0, \quad z_1 \in \bar{G}_1.$$

Проведем прямую l_0, перпендикулярную отрезку $[z_0, z_1]$ и проходящую через точку z_1. Множество $\bar{G}_1$ лежит по одну сторону от прямой l_0, точка z_0 — по другую сторону от прямой l_0. Пусть вектор $\overrightarrow{z_1 z_0}$ наклонен под углом φ_0 к положительному лучу действительной прямой. Тогда $K_1(\varphi_0) = \mathrm{Re}(z_1 e^{-i\varphi_0})$.

Проведем прямую l, перпендикулярную отрезку $[z_0, z_1]$ и проходящую через точку z_0. Тогда

$$K_2(\varphi_0) \ge \mathrm{Re}(z_0 e^{-i\varphi_0}) > \mathrm{Re}(z_1 e^{-i\varphi_0}) = K_1(\varphi_0).$$

Приходим к противоречию. Следовательно, множества равны. ■

Определение. Назовем ***выпуклой оболочкой*** ограниченного множества M пересечение всех замкнутых, выпуклых множеств $\bar{G}$, таких, что $M \subset \bar{G}$.

Из определения выпуклой оболочки множества M следует, что выпуклая оболочка есть наименьшее выпуклое, замкнутое множество, содержащее множество M.

Пусть $f(z)$ — целая функция экспоненциального типа, а $\gamma(t)$ — функция, ассоциированная по Борелю с $f(z)$.

Определение. Выпуклую оболочку множества особенностей функции $\gamma(t)$ назовем ***сопряженной диаграммой*** функции $f(z)$. Будем ее обозначать $\bar{D}$.

Таким образом, сопряженная диаграмма $\bar{D}$ — наименьшее выпуклое, замкнутое множество, содержащее все особенности функции $\gamma(t)$, тем самым $\bar{D}$ лежит в круге $|t| \le \sigma$ ($\gamma(t) \in A(|t| > \sigma)$), и на границе круга ($|t| = \sigma$) есть по крайней мере одна общая точка с $\bar{D}$. Заметим, что на каждой опорной прямой к множеству $\bar{D}$ у функции $\gamma(t)$ имеется хотя бы одна особенность.

Пусть $K(\varphi)$ — опорная функция к сопряженной диаграмме $\bar{D}$. Очевидны следующие **свойства опорной функции** $K(\varphi)$:

1) $\max K(\varphi) = \sigma = K(\varphi_0)$, где $z_0 = \sigma e^{i\varphi_0} \in \bar{D}$;
2) $K(\varphi) \ge -\sigma$.

Теорема 7.2. Пусть $f(z)$ — целая функция экспоненциального типа, $\gamma(t)$ — функция, ассоциированная по Борелю с $f(z)$, $\bar{D}$ — сопряженная диаграмма. Тогда имеет место представление

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \gamma(t)e^{zt}\,dt,$$

где C — замкнутый контур, охватывающий $\bar{D}$.

Доказательство. Так как

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|t|=R>\sigma} \gamma(t)e^{zt}\,dt = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|t|=R}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{t^{n+1}}\right)e^{zt}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{1}{2\pi i}\oint_{|t|=R}\frac{e^{zt}\,dt}{t^{n+1}},$$

но интеграл $\frac{1}{2\pi i}\oint_{|t|=R}\frac{e^{zt}\,dt}{t^{n+1}} = \frac{z^n}{n!}$, поэтому

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|t|=R>\sigma} \gamma(t)e^{zt}\,dt = f(z).$$

У функции $\gamma(t)$ нет особенностей между кривыми $|t| = R > \sigma$ и контуром C, поэтому и для контура C справедливо равенство

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \gamma(t)e^{zt}\,dt. \quad \blacksquare$$

Следствие. Пусть $K(\varphi)$ — опорная функция $\bar{D}$, тогда

$$\left|f(re^{i\varphi})\right| < A(\varepsilon)e^{[K(-\varphi)+\varepsilon]r}, \quad \varepsilon > 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\bar{D}_\varepsilon$ — ε-расширение сопряженной диаграммы $\bar{D}$, C_ε — граница $\bar{D}_\varepsilon$. По теореме 7.2 имеем

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_\varepsilon} \gamma(t)e^{zt}dt.$$

Отсюда

$$\left|f(re^{i\varphi})\right| \le \frac{l}{2\pi}\max_{t\in C_\varepsilon}|\gamma(t)|\exp\left[r\max_{t\in C_\varepsilon}\mathrm{Re}(te^{i\varphi})\right],$$

где l — длина контура C_ε, $\max\limits_{t\in C_\varepsilon}\mathrm{Re}(te^{i\varphi}) = K(-\varphi) + \varepsilon$. ■

О п р е д е л е н и е. ***Интегралом Лапласа для функции $f(z)$*** назовем интеграл вида

$$F(t) = \int_0^{\infty\cdot e^{i\varphi_0}} f(z)e^{-zt}dz,$$

где $f(z)$ непрерывна на луче l: $\arg z = \varphi_0$, $|f(z)| \le Ae^{a|z|}$, $z \in l$, интегрирование ведется по лучу l.

Лемма 7.1. Пусть функция $f(z)$ непрерывна на луче l и $|f(z)| \le Ae^{a|z|}$, $z \in l$, тогда интеграл Лапласа в полуплоскости $\mathrm{Re}(te^{i\varphi_0}) > a + \delta$ сходится и является аналитической функцией, при этом $|F(t)| \le \dfrac{A}{\delta}$, $\delta > 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для $z = re^{i\varphi_0}$ имеем оценку

$$\left|f(z)e^{-zt}\right| \le A\exp\left[ar - r\,\mathrm{Re}(te^{i\varphi_0})\right],$$

тем самым в полуплоскости $\mathrm{Re}(te^{i\varphi_0}) > a + \delta$ справедливо неравенство

$$|f(z)e^{-zt}| \le Ae^{-\delta r},$$

поэтому интеграл Лапласа сходится и

$$|F(t)| \le A\int_0^{+\infty} e^{-\delta r}dr = \frac{A}{\delta}.$$

Докажем аналитичность интеграла Лапласа. Возьмем на луче l точки $a_0 = 0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, $|a_n| \uparrow \infty$ при $n \to \infty$. Интеграл Лапласа можно представить в виде

$$F(t) = \sum_{k=1}^{n}\left(\int_{a_{k-1}}^{a_k} f(z)e^{-zt}dz\right) + \int_{a_n}^{\infty\cdot e^{i\varphi_0}} f(z)e^{-zt}dz.$$

Исходя из оценки

$$\left|\int_{a_n}^{\infty\cdot e^{i\varphi_0}} f(z)e^{-zt}dz\right| \le A\int_{|a_n|}^{+\infty} e^{-\delta r}dr, \quad \int_{|a_n|}^{+\infty} e^{-\delta r}dr \to 0, \quad n\to\infty,$$

получаем: в полуплоскости $\mathrm{Re}(te^{i\varphi_0}) > a+\delta$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_{a_{k-1}}^{a_k} f(z)e^{-zt}dz\right)$ сходится равномерно, каждый член ряда $\int_{a_{k-1}}^{a_k} f(z)e^{-zt}dz$ есть аналитическая функция, по теореме Вейерштрасса сумма ряда есть аналитическая функция. Итак, интеграл Лапласа есть аналитическая функция в полуплоскости $\mathrm{Re}(te^{i\varphi_0}) > a+\delta$. Так как $\delta > 0$ — произвольное, то интеграл Лапласа есть аналитическая функция в полуплоскости $\mathrm{Re}(te^{i\varphi_0}) > a$. ■

Задачи

I. Доказать, что функция $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(n+a)^s n!}$, $a>0$, принадлежит классу $[1, +\infty)$, s — вещественное число.

II. Найти функцию $\gamma(t)$, ассоциированную по Борелю, для следующих функций:
1) $f(z) = Ae^{az}$; 2) $f(z) = \sin z$; 3) $f(z) = \cos z$;
4) $f(z) = \mathrm{sh}\, z$; 5) $f(z) = \mathrm{ch}\, z$.

III. Найти $\gamma(t)$ для квазиполинома

$$P(z) = \sum_{i=1}^{k} A_i e^{b_i z}, \quad A_i \ne 0,$$

где b_i — вершины выпуклого многоугольника.

IV. Найти опорные функции для круга $|z| < \sigma$, отрезка $[-i\sigma, i\sigma]$, $\sigma > 0$.

V. Найти сопряженные диаграммы для следующих функций:
1) $f(z) = Ae^{az}$; 2) $f(z) = \sin z$; 3) $f(z) = \cos z$;
4) $f(z) = (\cos z)\cos(iz)$; 5) $f(z) = \mathrm{sh}\, z$; 6) $f(z) = \mathrm{ch}\, z$;
7) $f(z)$ — квазиполином.